О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРОЙ ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Г. А. Исаев

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0.$$

Пусть $[\mathscr{H} \to \mathscr{H}]$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{H}$, C_p — идеал этой алгебры, состоящий из всех линейных операторов T таких, что $\mathrm{Sp}(T^*T)^{p/2} < \infty$, $p > 0$. Максимальный идеал этой алгебры, состоящий из всех вполне непрерывных операторов, обозначим через C_∞ (см. [1]).

Целью настоящей работы является нахождение достаточных условий для полноты некоторой части и суммируемости рядов Фурье по той же части собственных и присоединенных векторов (сокращенно с. п. в.) пучка $L(\lambda)$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Общей основой работы является факторизация пучка $L(\lambda)$ на два множителя, а последняя в свою очередь связана сама по себе интересной задачей о разрешимости соответствующего операторного уравнения

$$A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + A_1 Z + A_0 = 0 \tag{1}$$

в пространстве $[\mathscr{H} \to \mathscr{H}]$.

Указанным вопросам посвящены многочисленные работы различных авторов [1] — [6].

2. Сформулируем основную теорему о полноте.

Т е о р е м а 1. *Пусть существует целое положительное число m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ такое, что операторы $T_j \equiv A_1^{-1} A_j$ $(j = 0, 2, 3, \ldots, n)$ удовлетворяют соотношениям*

а) $$\| T_j \| \cdot \| T_0 \|^{j-1} \leqslant \| T_m \| \cdot \| T_0 \|^{m-1} < \delta,$$

где $\delta > 0$ — наперед заданное число (зависящее от порядка пучка),

б) $$T_0 \in C_p, \quad p > 0,$$

в) $$\mathrm{Ker}\, A_0^* = \{0\},$$

г) $$|\arg(T_0 \varphi, \varphi)| \leqslant \frac{\pi}{\alpha}, \quad \alpha \geqslant 2 \quad \text{и} \quad \alpha > 2p.$$

Тогда существует число $r > 0$ такое, что часть с. п. в., соответствующая собственным числам пучка $L(\lambda)$, по модулю не превосходящих числа $r \| T_0 \|$, образует полную систему в пространстве $\mathscr{H}$.

Поясним роль условий а) — г).

Неравенство а) обеспечивает существование корня Z операторного уравнения (1). Из условия б) вытекает принадлежность оператора Z классу C_p, а условие в) означает, что $\mathrm{Ker}\, Z^* = \{0\}$. Наконец, неравенство г) обеспечивает существование некоторого угла, внутри которого для достаточно больших по модулю λ резольвента $(E - \lambda Z)^{-1}$ ограничена. Оказывается возможным применять теорему Фрагмена — Линделёфа для внешности указанного угла. Известные рассуждения М. В. Келдыша (см. [1], [7]) завершают доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Для квадратичных пучков $\delta = 1/4$. Можно вычислить δ и для пучков третьего порядка. Для квадратичных пучков этот результат был установлен в работе И. В. Горюка [4].

З а м е ч а н и е 2. Если $A_1 = E$, где E — единичный оператор, то такие пучки совпадают с пучками, изученными в работах [2], [3] и [5]. Но в этих работах изучаются в основном операторные пучки с самосопряженными коэффициентами. Близкие к нашим результаты установлены А. С. Маркусом в работе [5].

Т е о р е м а 2. *Пусть имеют место условия* а) — г) *теоремы* 1. *Тогда система с. п. в. пучка $L(\lambda)$, соответствующая собственным числам из круга $|\lambda| < \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, полна в $\mathscr{H}$, может быть, с конечным дефектом.*

3. Пусть выполняются условия а), б) и г) теоремы 1. Тогда система спв пучка $L(\lambda)$, соответствующая собственным числам из круга $|\lambda| \leqslant r \| T_0 \|$, образует полную систему в замыкании области значений оператора $Z \in C_p$. Составим формальный ряд Фурье по элементам этой системы для $f \in \operatorname{Im} Z$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k. \tag{2}$$

Определение. Будем говорить, что ряд (2) *суммируем к вектору f по методу Абеля порядка* β (в смысле Лидского [8]), если существует последовательность натурального ряда $\{n_k\}_1^\infty$ такая, что для любого $t > 0$ сходится ряд

$$u(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} c_s(t)\, \varphi_s \Big), \tag{3}$$

причем $\lim\limits_{t \to +0} u(t) = f$.

Следующая теорема обеспечивает суммируемость ряда (2) по методу Абеля с указанием порядка и коэффициентов $c_s(t)$ ряда (3).

Теорема 3. *Пусть имеют место условия* а), б) *теоремы* 1, *кроме того,*

$$|\arg(T_0\varphi, \varphi)| \leqslant \frac{\pi}{\alpha}, \qquad \alpha > \max\{2, 2p\}. \tag{2'}$$

д) *Характеристические числа оператора Z из круга $|\lambda| \leqslant q$ находятся вне угла $|\arg \zeta| \leqslant \pi - \dfrac{\pi}{\alpha} - \varepsilon$. (Их конечное число.) Здесь q — некоторое достаточно большое (известное) число.*

Тогда для каждого вектора $f \in \operatorname{Im} Z$ ряд Фурье (2) *суммируем к f методом Абеля порядка β_1, где $p \leqslant \beta_1 < \dfrac{\alpha}{2}$, $2n < \beta_1 \leqslant 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ с коэффициентами*

$$c_{kj}(t) = e^{\lambda_0^{\beta_1} t} (f, Z^* \psi_{m_j-k-1}),$$

и порядка β_2, где $p \leqslant \beta_2 < \dfrac{\alpha}{2}$, $2n-1 < \beta \leqslant 2n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ с коэффициентами

$$c_{kj}(t) = e^{-\lambda_0^{\beta_2} t} (f, Z^* \psi_{m_j-k-1}).$$

Здесь $\psi_0^{(j)}, \psi_1^{(j)}, \ldots, \psi_{m_j-1}^{(j)}$ — с. п. в. оператора Z^*, отвечающие $\lambda = \overline{\lambda}_0$, где λ_0 — характеристическое число оператора Z.

Автор благодарен А. Г. Костюченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.

[2] A. Friedman, M. Shinbrot, Nonlinear eigenvalue problems, Acta Math. **121**:1—2 (1968), 77—125.

[3] R. E. L. Turner, A class of nonlinear eigenvalue problems, J. of Funct. Analysis 7, 2:3 (1968), 297—322.

[4] И. В. Горюк, Одна теорема о полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка, Вестник МГУ, матем., № 1 (1970), 55—60.

[5] А. С. Маркус, О полноте части собственных и присоединенных векторов для некоторых нелинейных спектральных задач, Функц. анализ 5:4 (1971), 78—79.

[6] М. Г. Гасымов, К теории полиномиальных операторных пучков, ДАН **119**:4 (1971), 747—750.

[7] М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН 77:1 (1951), 11—14.

[8] В. Б. Лидский, О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды ММО **11** (1962), 3—35.

Поступило в Правление общества 1 июня 1972 г.